Ifremer – Cellule Océano-Météo

Vagues extrêmes : Comment distinguer ce qui est normal de ce qui est anormal

1 Théorie

1.1 Rappels sur les modèles

Il suffit de regarder la mer pour reconnaître des vagues, mais cela ne suffit pas pour les étudier, et encore moins pour prendre les bonnes décisions quand il s'agit de concevoir des navires, des plates-formes offshore, des terminaux côtiers ou de déterminer si des actions de protection contre le recul du littoral sont nécessaires.

Un modèle, c'est l'outil qui nous permettra soit d'**expliquer** les vagues, leur génèse, leurs effets, etc., soit de **substituer** à la réalité, par exemple à des essais en vraie grandeur, des formules mathématiques dans des calculs ou des maquettes dans des expériences à échelle réduite. On s'efforce en général de ne retenir pour représenter la réalité que les modèles qui sont cohérents avec ceux d'explication couramment admis.

On voit donc apparaître la distinction entre le *normal*, c'est à dire ce qui rentre parfaitement dans le champ d'application des modèles dont on dispose, et ce qui est *anormal*, qui contredit ces modèles ou qu'on ne parvient simplement pas à représenter.

1.2 Le modèle hydrodynamique

Les vagues sont :

- **des ondes d'interface**. C'est la discontinuïté entre deux fluides de densité différente qui permet aux vagues de se constituer. Ainsi, chacun connaît les vagues à l'interface air-eau, mais on sait moins souvent qu'il s'en trouve aussi à l'interface entre couches d'eau de température – et donc de densité – différente (ondes internes), et qu'on peut même en observer à des interfaces entre couches d'air.
- **des ondes de gravité**. L'interface est en équilibre car il s'agit de l'équi-gravité correspondant à la pression atmosphérique. Si on écarte l'interface de cette position d'équilibre, on a une force de rappel vers la position d'équilibre en raison de la gravité. On ne peut avoir de vagues en apesanteur (ou plus exactement, on aurait alors de ondes capillaires, où la force de rappel est due à la tension capillaire).

- **des ondes progressives**. L'eau étant un milieu continu et quasi-incompressible, une oscillation locale se répercute de proche en proche.

Les équations dérivent principalement de la mécanique ($grad\ p = \rho(F - \gamma)$), de la continuité (en cas de non-compressibilité, $divV = 0$), du premier principe de la thermodynamique (conservation de l'énergie) et d'une équation d'état (on se contente souvent de $\rho = Cste$). On a donc un système d'équations différentielles, auxquelles il faut adjoindre les conditions aux limites (par exemple, que la vitesse est parallèle aux parois d'un bassin, ou tangente à la surface libre, etc.).

Moyennant des simplifications raisonnables (petites amplitudes, viscosité nulle, mouvement irrotationnel, etc.), on ramène ces équations à des équations linéaires, c'est à dire que toute somme de solutions est elle-même solution. Parmi ces solutions, on note :

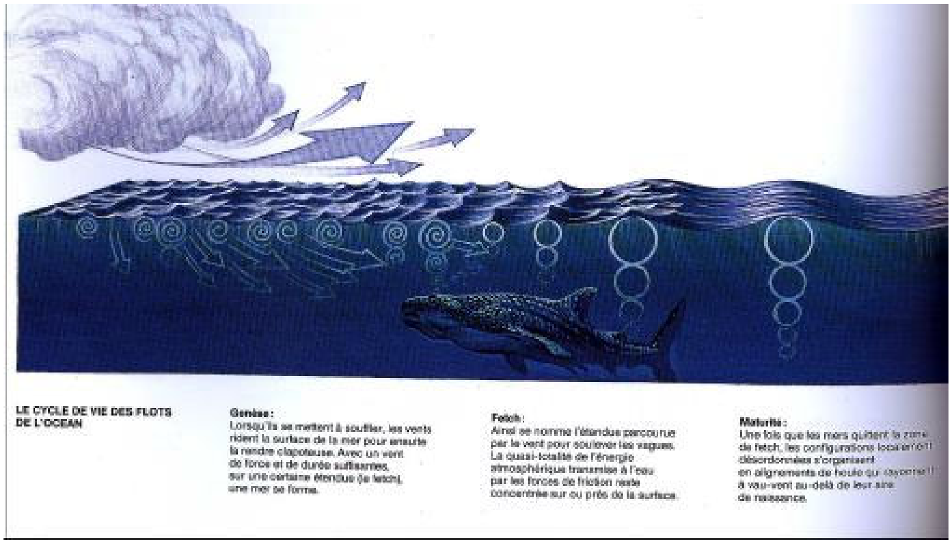
- **l'onde solitaire.** Elle se propage sans déformation, et correspond à un ébranlement de l'ensemble de la tranche d'eau.

- **la sinusoïde** (houle sinusoïdale d'Airy). Elle est de la forme $acos(2\pi ft - kx)$, où f, fréquence, inverse de la période, et k, nombre d'onde, valant $\frac{2\pi}{\lambda}$, où λ est la longueur d'onde. Elle est donc périodique à la fois dans le temps et dans l'espace. k et f sont reliées par la relation dite de dispersion, parce qu'elle exprime que les ondes se propagent à des vitesses différentes suivant leurs périodes, et qu'un ensemble initialement groupé va donc se disperser, les plus longues prenant l'avance sur les plus courtes. La relation de dispersion s'écrit :
$$\frac{gk}{(2\pi f)^2} th(kd) = 1$$
où d est la profondeur à l'endroit donné et g l'accélération de la peesanteur.

2 La formation des vagues

En soufflant sur la surface de l'eau, le vent fait osciller la surface libre autour de sa position d'équilibre comme un archet avec une corde de violon, créant des vaguelettes (sinusodales). Quand il y a déjà des vaguelettes, l'effet est double : d'une part, il amplifie les vaguelettes existantes, d'autre part, il continue à en créer de nouvelles. Au cours de l'amplification, les vaguelettes augmentent simultanément en taille, en longueur d'onde et en période. Si le vent souffle sur une assez grande longueur et pendant une assez longue période, on aura en un point donné les vaguelettes qu'il vient de créer, des petites vagues créées comme vaguelettes quelque temps auparavant en amont et amplifiées, et des vagues plus grosses, créées encore plus en amont, et encore plus amplifiées.

Quand le vent cesse de souffler, les vagues continuent de se propager, en ne s'amortissant que très lentement. Ainsi, une houle générée au large de l'Argentine pourra atteindre, cinq jours plus tard, les côtes de l'ouest de l'Afrique. On



distingue généralement la *houle*, vagues générées ailleurs qu'au point d'observation auquel elles sont arrivées après un certain temps de propagation, et la mer du vent, générée par le vent local.

3 Le modèle de superposition linéaire

Si on mesure la surface libre en un point donné, on aura la superposition d'un très grand nombre de vagues, provenant de plus ou moins loin. La distance par rapport au point de génération de chacune d'entre elles, mesurée en longueurs d'onde, a une partie fractionnaire aléatoire. Le modèle consacré est donc celui de la superposition linéaire de houles d'Airy :

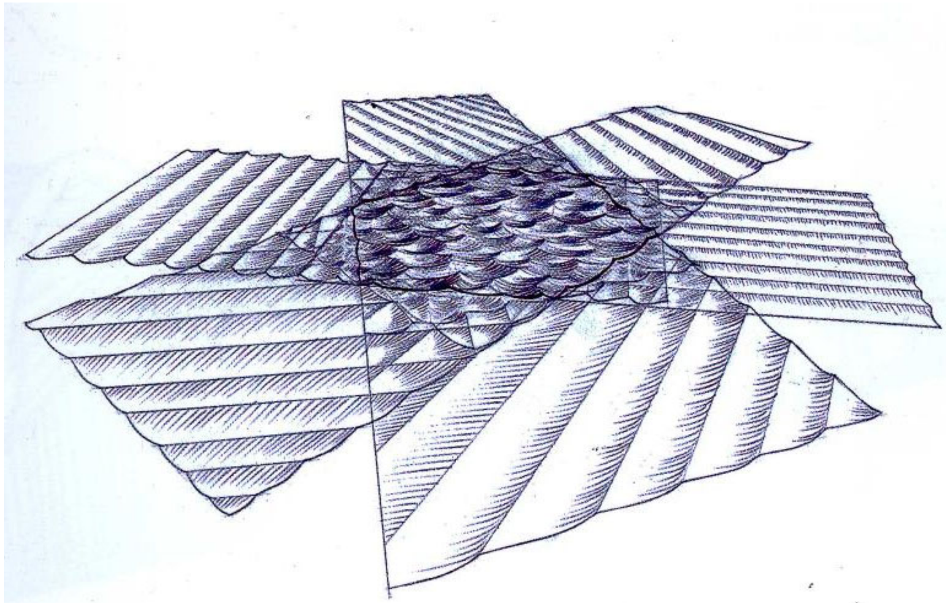
$$\eta(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i cos(2\pi f_i t + \phi_i)$$

où $\eta(t)$ est l'élévation de la surface libre en un point donné.

La représentation de a^2 en fonction de la fréquence f est dénommée densité spectrale de puissance.

3.1 Estimation par la transformée de Fourier

La transformée de Fourier revient à décomposer un signal comme somme d'ondes sinusoïdales. Elle est donc particulièrement adaptée à l'étude des enregistrements de vagues.



Il faut toutefois noter que si les calculs sont aisés, depuis la découverte des algorithmes de transformation de Fourier rapide (FFT) et l'utilisation généralisée des ordinateurs, un certain nombre de difficultés pratiques subsistent dans l'estimation des véritables coefficients.

Elles sont principalement liées :

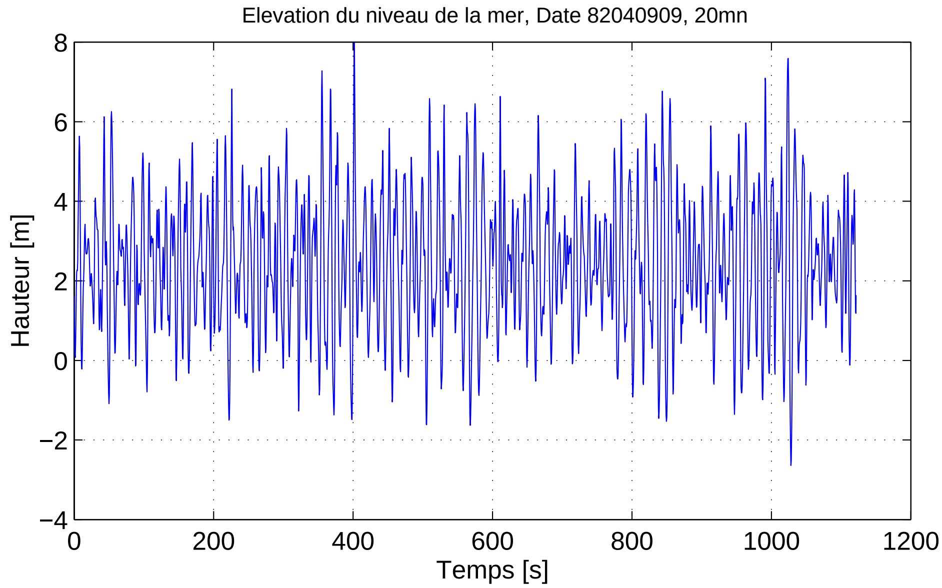
- au caractère infini et continu de la superposition, alors que la durée d'observation est finie.
- aux effets de bord, qui introduisent des discontinuités dans le signal qui est supposé se répéter périodiquement à l'infini.

3.2 Conséquences statistiques

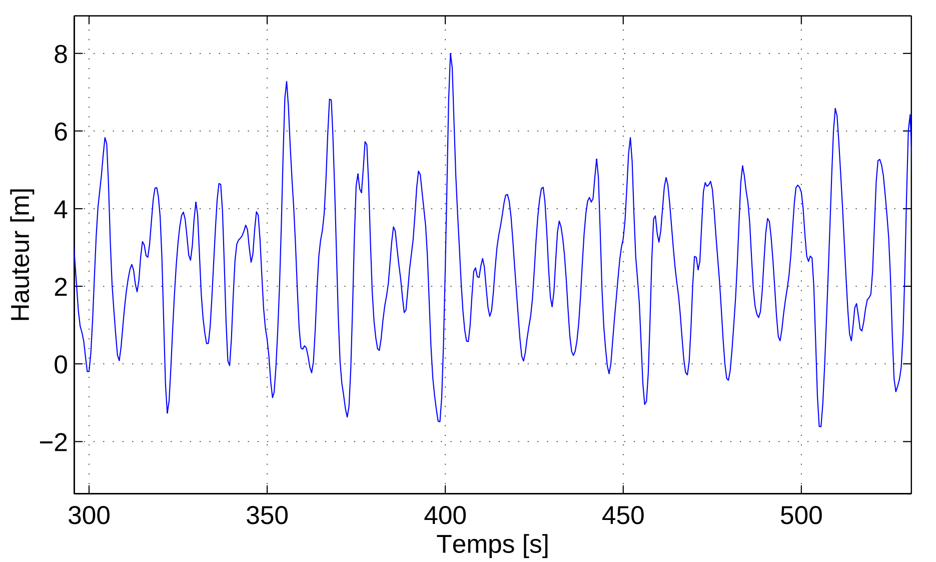
La plupart des résultats statistiques utilisent le théorème central limite : *la somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes de même loi tend vers une variable gaussienne.*

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\; e^{\frac{-x^2}{2\alpha}}$$

Ainsi, si on découpe le spectre en bandes de fréquence telles que sa variation au sein de chacune soit négligeable, l'élévation de la surface libre sera la somme



Elevation du niveau de la mer, Date 82040909, 20mn
Hauteur [m]
Temps [s]
8
6
4
2
0
−2
−4
0
200
400
600
800
1000
1200



Hauteur [m]
Temps [s]
8
6
4
2
0
−2
300
350
400
450
500

des sommes partielles correspondant à chacune des bandes.

$$\eta(t) = \sum_{j=1}^{M} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_j cos(2\pi f_i t + \phi_i) \right) \tag{1}$$

$$= \sum_{j=1}^{M} C_j(t) \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

D'après le théorème central limite, les $C_j(t)$ peuvent être considérées comme suivant des lois gaussiennes. Or la somme de variables gaussiennes indépendantes est elle-même gaussienne. La distribution statistique de l'élévation de la surface libre est donc une loi de Gauss, et on peut même aller plus loin et montrer que le processus est gaussien.

Réciproquement, si on calcule le spectre par carré du module de la transformée de Fourier d'un signal quelconque, chacun des coefficients dont on prend le carré va être la somme d'un grand nombre de variables aléatoires de même loi, donc suivre une loi de Gauss, et le spectre étant la somme du carré de la partie réelle et de celui de la partie imaginaire, les valeurs calculées suivent une loi du χ^2 à 2 degrés de liberté. La loi du χ^2 à 2 degrés de liberté a un écart-type égal à sa moyenne, ce qui montre les difficultés qu'on peut avoir à estimer correctement le spectre à partir d'une mesure.

Pour un processus gaussien, on peut montrer que les extrema locaux suivent une loi qui est la composition d'une loi de Gauss et d'une loi de Rayleigh.

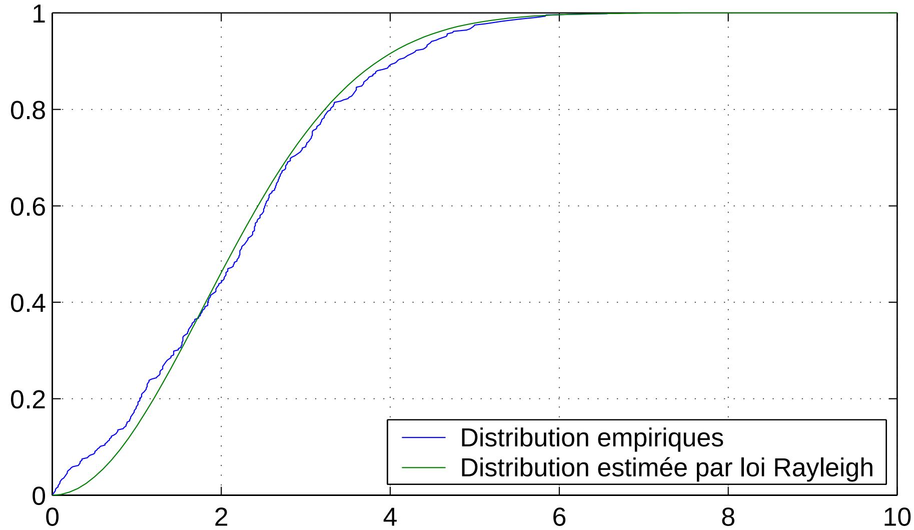
$$f(x) = \frac{2x}{\alpha} e^{\frac{-x^2}{\alpha}}$$

Les proportions relatives de Gauss et Rayleigh sont régies par la largeur de bande (en gros, le nombre d'extrema locaux par rapport au nombre de passages à zéro) : plus elle est étroite, c'est à dire plus on a tendance à passer par zéro entre un minimum et le maximum suivant, et plus la loi est proche de la loi de Rayleigh. Si on ne considère que les fortes valeurs, on se rapproche de ces conditions de bande étroite et la loi se rapproche donc de la loi de Rayleigh. De même, on compte les vagues « zéro-crossing », ce qui revient à rendre la bande plus étroite et donc à se rapprocher de la loi de Rayleigh.

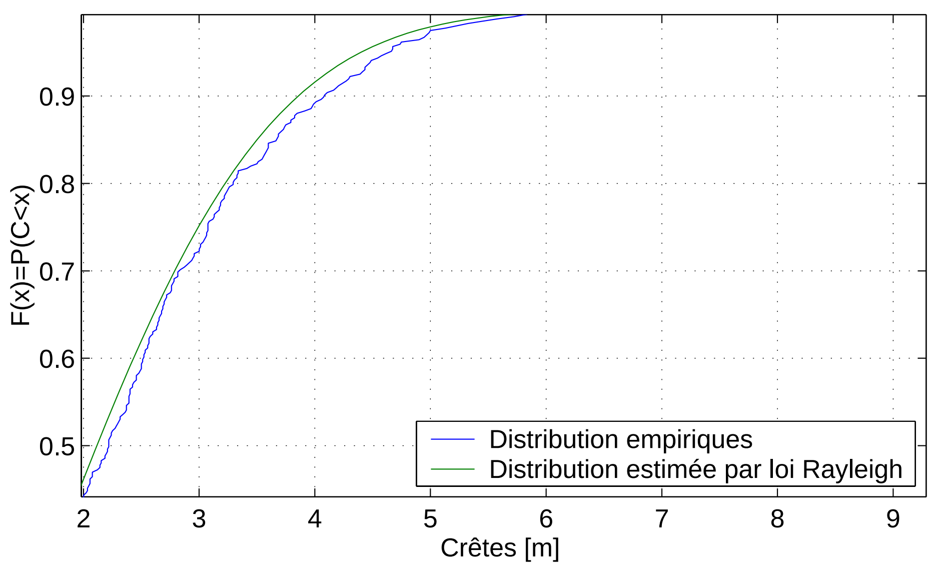
Les crêtes des fortes vagues suivent donc une loi de Rayleigh si on admet le modèle de superposition de houles d'Airy. Les hauteurs crête à creux sont approximativement 2 fois la hauteur des crêtes, et suivent donc aussi une loi de Rayleigh.

4 Influence des non-linéarités

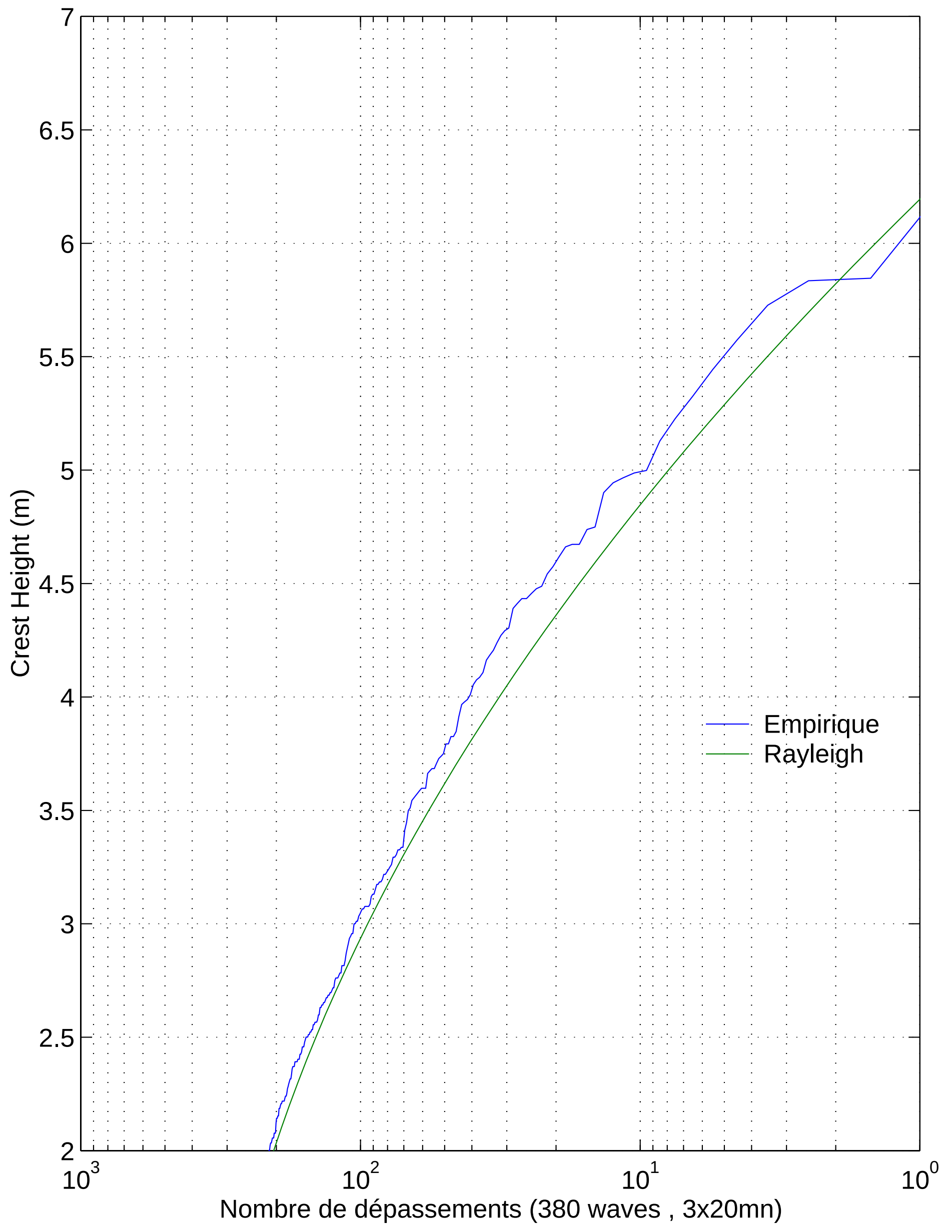
Dans la réalité, les composantes, même initialement indépendantes, interréagissent entre elles. En effet, la solution sinusoïdale ne convient que pour les

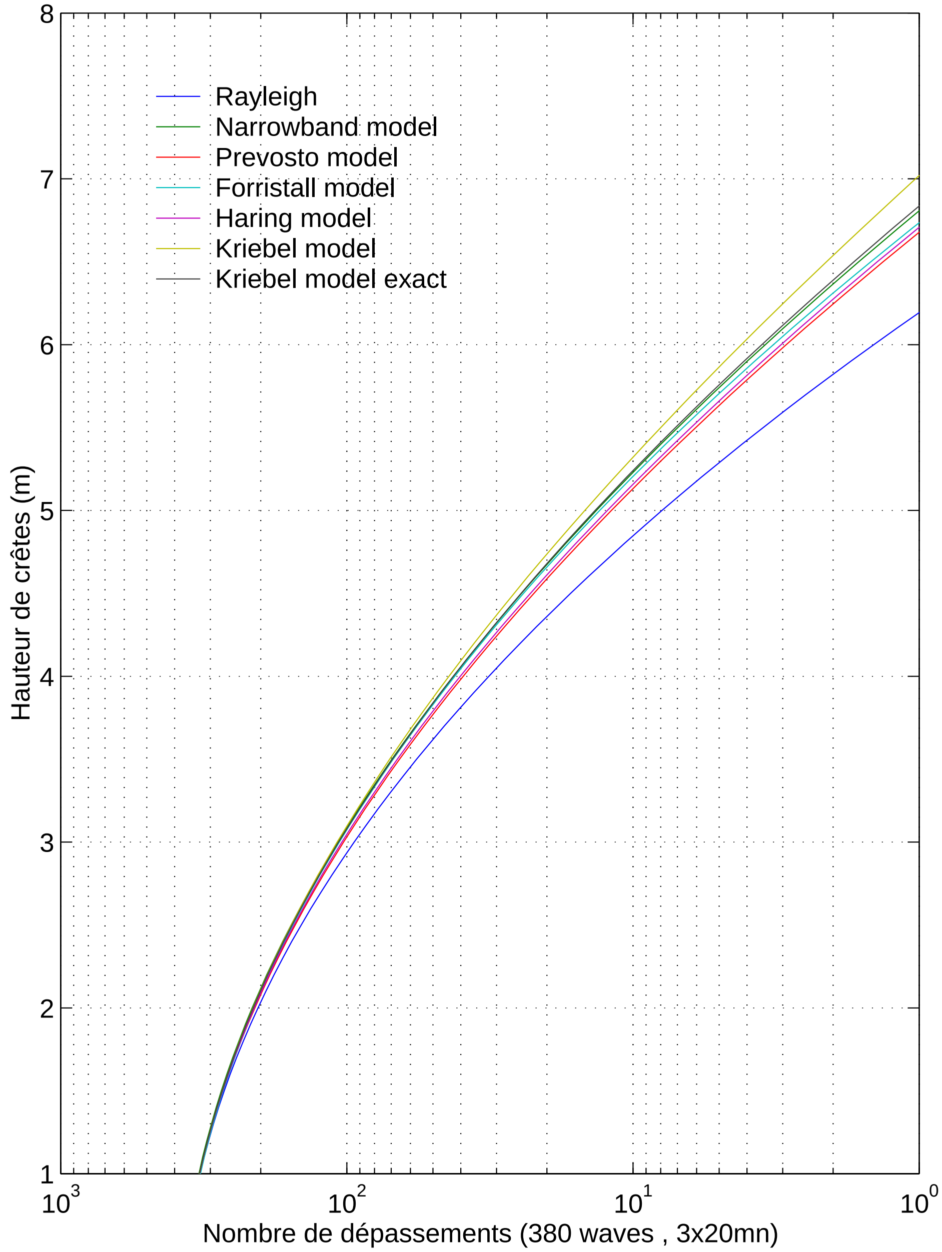


Distribution empiriques
Distribution estimée par loi Rayleigh



F(x)=P(C<x)
Crêtes [m]
Distribution empiriques
Distribution estimée par loi Rayleigh


7
6.5
6
5.5
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
Crest Height (m)
Empirique
Rayleigh
10^3
10^2
10^1
10^0
Nombre de dépassements (380 waves , 3x20mn)


Rayleigh
Narrowband model
Prevosto model
Forristall model
Haring model
Kriebel model
Kriebel model exact
Hauteur de crêtes (m)
Nombre de dépassements (380 waves , 3x20mn)
8
7
6
5
4
3
2
1
10^3
10^2
10^1
10^0

oscillations infinitésimales. Dès que l'élévation de la surface libre prend une certaine ampleur, on doit en toute rigueur apporter des termes correctifs.

Pour ce faire, on va choisir un petit paramètre (petit devant 1), comme par exemple la cambrure $\frac{\eta}{L}$, et réécrire les équations en développements limités suivant les puissances de ce petit paramètre. Il va donc apparaître η^2 (et éventuellement η^3, η^4, etc.) dans les équations, et si on développe la somme :

- les puissances successives pour chacune des ondes élémentaires. Si on n'en considère qu'une seule, la solution devient alors ce qu'on appelle la houle de Stokes.

- les produits croisés, qui en vertu des formules trigonométriques, vont se ramener à des fréquences sommes et différences de celles qui figuraient dans la formule linéaire (dite *le premier ordre*).

4.1 Ondes libres - Ondes liées

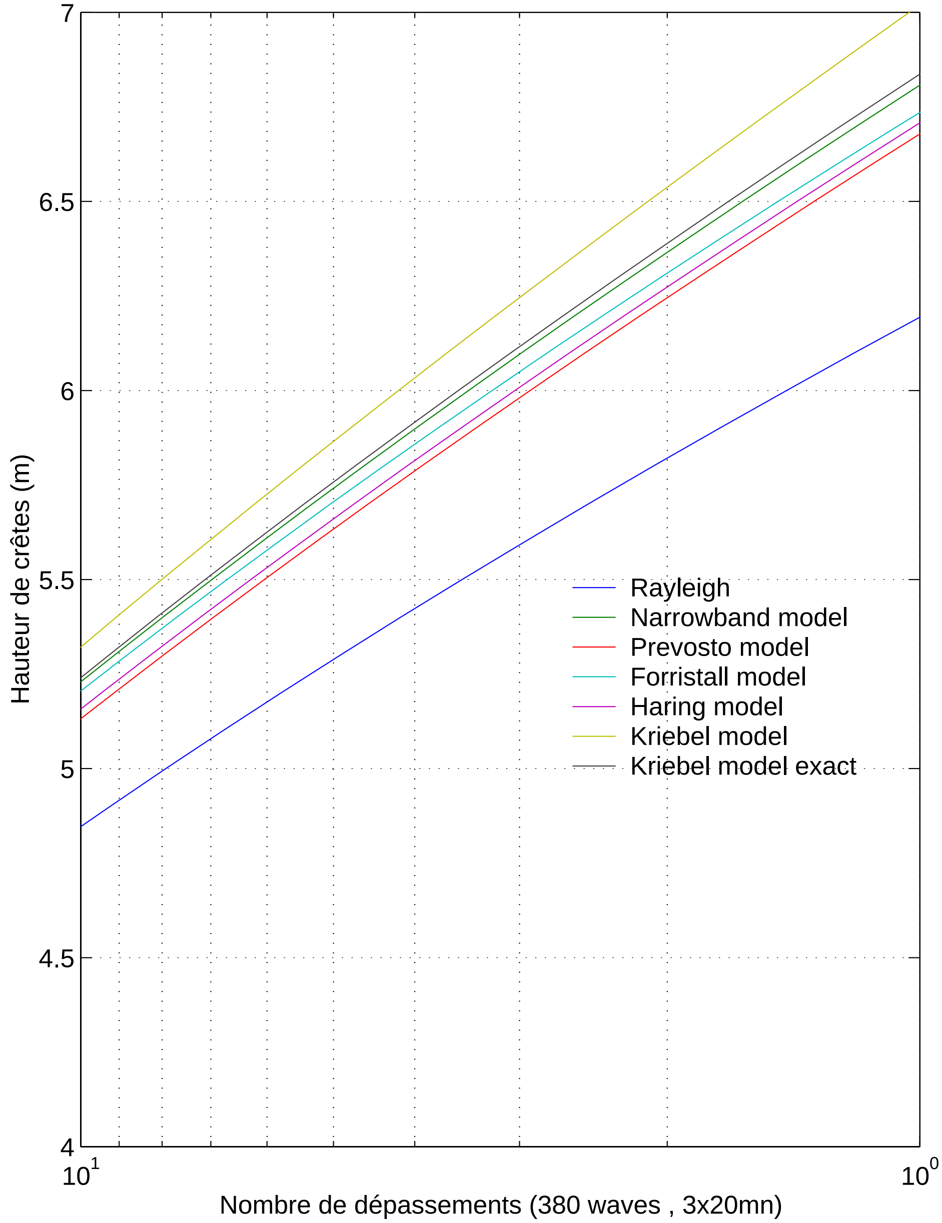
Les composantes qui résultent du carré ou du produit des solutions linéaires vont bien évidemment se propager avec la célérité des ondes dont l'interaction les aura générées, et non avec la célérité qu'elles auraient eue si elles avaient été créées directement à leur fréquence par le vent. On parle alors d'*ondes liées*. Celles qui ont été créées par le vent et se propagent avec leur célérité "normale" sont des *ondes libres*.

4.2 Hauteur des crêtes

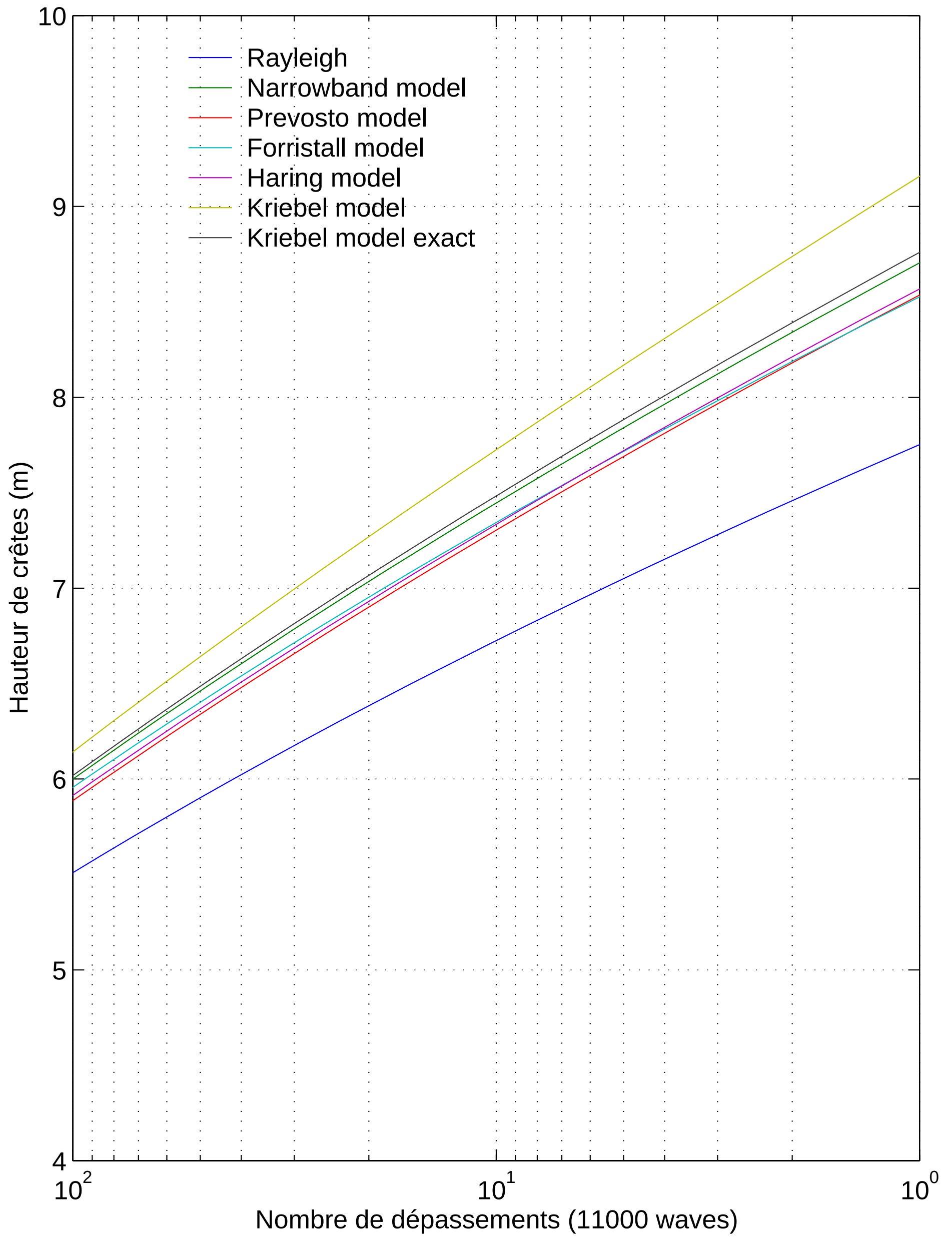
Les ondes liées ne se présentent pas comme des vagues au sens habituel du terme. En fait, elles représentent la déformation du profil de la vague par rapport à la sinusoïde d'origine. Cette déformation consiste essentiellement à amplifier les crêtes et à réduire les creux. Ces deux effets se compensent sur les hauteurs crête-creux, et sont quasi-indétectables à partir de mesures par bouées. Les mesures par bouée ont d'ailleurs tendance à ramener le profil à une sinusoïde car la bouée arrondit les crêtes en y restant trop longtemps (emportée par la vitesse des particules), et au contrire raccourcit les creux en se trouvant ramenée par le courant vers le front de la vague suivante.

Pour une plate-forme fixe, ou un navire dont la dimension est du même ordre que la longueur d'onde de la vague, la hauteur de la crête est plus élevée quand on prend en compte le second ordre.

On peut imaginer qu'on va encore augmenter ces effets si on va vers les ordres suivants, mais bien sûr, la complexité des calculs augmente aussi de manière considérable. La question qui se pose est de savoir si cette augmentation suffit à expliquer les plus grandes vagues observées.



7
6.5
6
5.5
5
4.5
4
Hauteur de crêtes (m)
10^1
10^0
Nombre de dépassements (380 waves , 3x20mn)
Rayleigh
Narrowband model
Prevosto model
Forristall model
Haring model
Kriebel model
Kriebel model exact



10
9
8
7
6
5
4
Rayleigh
Narrowband model
Prevosto model
Forristall model
Haring model
Kriebel model
Kriebel model exact
Hauteur de crêtes (m)
10^2
10^1
10^0
Nombre de dépassements (11000 waves)